Niveau(x) d'enseignement: 4 Numéro EDUQ : 9270797
Centre d'intérêt: 072

Rouan, Omar.

Hasard et probabilité : conceptions d'élèves de 16 à 18 ans / par Omar Rouan. -- Montréal : Université du Québec à Montréal, Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation, 1991.
40 f. ; 29 cm. -- (Séminaire sur la représentation ; 58)

"La publication de ce séminaire est rendue possible grâce à une subvention du fonds FCAR". Bibliogr.: f. 39-40.

Vedette(s)-secondaire(s): Université du Québec à Montréal. Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation

Descripteur(s): Psychologie de l'adolescent * Adolescent * Opinion de l'étudiant * Questionnaire * Secondaire (Ordre d'enseignement)

Identificateur(s) de sujet: Probabilités * Hasard

Ce document s'intéresse aux idées que se font des adolescents du groupe d'âge 18-19 ans sur les notions de hasard et de probabilité. Il procède d'abord à une analyse des notions de hasard et de probabilité, puis à une précision du vocabulaire et de la théorie de la connaissance qui est adoptée. Ensuite, il effectue un survol critique des recherches didactiques dans le domaine. Il formule par la suite les hypothèses et les objectifs de la recherche, précise la démarche méthodologique et présente le questionnaire utilisé pour recueillir les conceptions des étudiants. Il analyse et interprète finalement certains des résultats obtenus.

Type de document:

9270717

CENTRE INTERDISCIPLINAIRE DE RECHERCHE SUR
L'APPRENTISSAGE ET LE DEVELOPPEMENT EN EDUCATION

cirade

Université du Québec à Montréal

Hasard et probabilité: conceptions d'élèves de 16 à 18 ans

par Omar Rouan
Étudiant finissant de 2e cycle
Maitrise en didactique des mathématiques
CIRADE, Université du Québec à Montréal

Séminaire sur la Représentation

14 septembre 1990 - no 58

CIRADE, UQAM, septembre 1991

Note: La publication de ce séminaire est rendue possible grâce à une subvention du fonds FCAR.

INTRODUCTION

Le développement rapide des théories mathématiques de probabilités et de statistique durant le siècle dernier, la qualification conventionnelle, de plus en plus répandue, des probabilités et statistique comme étant le langage des siècles présent et prochain, l'utilisation de ces deux branches dans la majorité des domaines de la connaissance humaine, aussi bien scientifique que technologique..., des raisons, parmi d'autres, qui justifient l'importance accrue de ces deux sujets et nous incite à accorder plus d'importance à leur enseignement.

Quoiqu'ils sont parmi les derniers sujets introduits dans les programmes éducatifs et scolaires, les probabilités et la statistique sont en train de susciter de plus en plus d'intérêt de la part des cherheurs en psychologie, en éducation et en apprentissage des mathématiques. C'est dans ce cadre que se situe notre motivation à explorer le domaine de l'apprentissage de la notion de probabilité.

Plusieurs chercheurs dont Piaget, ont étudié le développement des concepts de hasard et de probabilité chez l'enfant. Ils ont abouti chacun de son côté à l'existence d'idées de hasard et de chances chez des enfants qu'ils ont questionnés ou interviewés. Piaget et al. (1951) reconnaissent l'existence de ces idées chez l'enfant à partir de l'âge de sept ans, alors que Fischbein (1970) les reconnaît sous forme de ce qu'il a appelé des "intuitions primaires", et ce à des âges encore plus bas.

Du fait que nous nous intéressons surtout à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités et que ce dernier n'a lieu qu'au niveau secondaire, nous nous intéressons aux idées que se font des adolescents de **18-19 ans**, sur les notions de hasard et de probabilité avant tout enseignement de cette dernière. Les recherches signalées précédemment et bien d'autres, qui ne sont pas mentionnées dans le présent article, justifient l'existence de telles idées.

Pour y parvenir, nous procéderons d'abord à une analyse des notions de hasard et de probabilités, puis à une précision de notre vocabulaire et de la théorie de la connaissance que nous adoptons. Ensuite, nous procéderons à un survol critique des travaux didactiques dans le domaine. Nous formulons après, nos hypothèses et nos objectifs. Nous préciserons dans un deuxième temps notre démarche méthodologique et nous procéderons à l'analyse et l'interprétation de certains des résultats obtenus.

I- PROBLÉMATIQUE

Partant du fait que les élèves arrivent en classe avec des connaissances déjà acquises sur la notion à enseigner et que ces connaissances peuvent aider ou s'opposer à l'apprentissage de cette dernière, nous nous sommes intéressés à l'étude des origines des difficultés posées par l'apprentissage du concept de probabilité chez des adolescents du secondaire.

Nos premières lectures sur la question nous ont suggéré une orientation de la recherche vers la notion de hasard qui est parmi les notions les plus importantes se trouvant à la base de celle de probabilité. Pour nous éclairer plus dans notre étude et pour approfondir cette dernière, nous avons senti la nécessité d'une analyse conceptuelle des notions de hasard et de probabilité. C'est ainsi que nous avons essayé de détecter la notion de hasard chez les philosophes grecs, chez les mathématiciens du 17e et 18e siècles et dans la science. Aussi, nous avons examiné les différentes interprétations et définitions de la notion de probabilité.

1. Chez les grecs

Pour certains prédécesseurs d'Aristote, le hasard existait et pour d'autres il n'existait pas. Lorsqu'il existait, il était considéré comme une cause expliquant certains phénomènes naturels, telle que l'existence de certains animaux. S'il n'existait pas, c'était parce qu'il n'avait pas de place parmi les "causes" de l'existence que les philosophes déterminaient.

C'est à Aristote qu'on doit la première explication du mot hasard, auquel il a associé les mots accident, coïncidence, conjonction. Il définit l'accident comme étant quelque chose qui peut, soit appartenir soit ne pas appartenir à une seule et même chose. Pour le mot "chose", nous croyons qu'il s'agit de "l'accident" lui-même[1]. D'après la même référence (voir note 1), la meilleure version de l'explication du hasard donnée par Aristote, se trouve dans le livre de JULIENNE JUNKERSFELD: "The Aristotelian-Thomistic concept of chance"[2], où, par hasard, Aristote signifie:

> "Something which take place occasionally; has the caracter of an end; is such that it might have been the object of a natural or of a rational appetite; was not in fact the object of any appetite but came into being by accident".

---

1 La définition telle que dans la référence utilisée est: "it is something which may possibly either belong or not belong to any one and self-same thing" O.B. Sheynin (1973).

2 Notre-Dame, Indiana, 1945, p. 22.

Ici la notion d'appétit est une notion spécifique au discours et à la philosophie d'Aristote. Elle dénote la tendance et la volonté à s'identifier à un monde, à une réalité, à une vérité pré-existante et absolue qu'Aristote appelle "esprit moteur" et que toute créature (objets, êtres vivants,...) tendent à atteindre.

Donc, chez les grecs nous remarquons que c'est le mot hasard qui était spécifié. Aucune tentative de mesure ou de comparaison de chances n'était entreprise à cette époque. C'est pour nous la période des premières tentatives de construction du sens de l'idée de hasard et de l'aléatoire par l'esprit humain, et ce, loin de toute idée de mesure et de toute possibilité de calcul.

2. Hasard et chances au 17e et 18e siècles

Le langage des chances n'a commencé qu'aux environs du 17e et 18e siècles avec Cardan, Pascal, Fermat, Huygens et d'autres mathématiciens de l'époque, ce, dans le cadre de leurs travaux sur la résolution des problèmes posés par les joueurs de jeux de hasard. C'est là où ils ont commencé les premiers calculs des chances, franchissant ainsi une deuxième étape dans l'exploration du hasard.

Cette deuxième étape est donc caractérisé par une concrétisation de la notion de hasard via les situations de jeux dits de hasard. Quoique ces dernières situations ne donnent pas une représentation complète de cette notion complexe, celle du hasard, elles ont permis son soumission à la mesure et au calcul.

3. Hasard dans la science

L'idée de hasard est manifestée dans la pensée scientifique et surtout en biologie et en physique. Elle se présente différemment suivant la période et le champ des activités scientifiques. Ainsi l'idée de hasard chez les physiciens classiques qui ont adopté une philosophie déterministe n'est pas la même que celle des physiciens atomiques anti-déterministes. Les premiers représentés par Poincaré, Laplace et d'autres, définissent le hasard comme une mesure du degré d'ignorance des causes, inconnues, d'un phénomène donné et croient au **démon de Laplace**[3]. Les autres lient la notion de hasard à l'impossibilité d'une connaissance absolue et reconnaissent l'existence du hasard au coeur de l'atome.

---

[3] Fiction forgé par Laplace d'un démon qui, à un moment donné, connaîtrait la position et le mouvement de tous les atomes et serait alors en mesure de calculer d'avance l'avenir total de l'univers.

4. La notion de mesure

Avant de parler de la notion de probabilité, il est nécessaire de préciser la notion de mesure qui est à la base même de la notion de probabilité. Cette notion se trouvent parmi celles qui séparent le déterminisme "primitif" des philosophes de l'antiquité et le déterminisme des physiciens classiques. En effet, les anciens lorsqu'ils parlent de causes, ne distinguent pas entre les causes physiques et les causes métaphysiques. Par contre, dans son livre "calcul des probabilités", Poincaré nous parle de hasard mesurable, lié aux phénomènes observables (physique) et de hasard non mesurable lié à des phénomènes non observables (métaphysiques). Le premier étant relatif à la science.

La mesure part donc des observations d'un phénomène donné et passe par des niveaux d'activités mentales. Un premier niveau consiste en une activité de comparaison des observations ou des grandeurs observées. Un deuxième niveau consiste à représenter par un nombre l'intensité d'un caractère, de créer un lien entre un nombre et un objet physique. Dans le cas de la probabilité, l'objet physique est un événement associé à une expérience aléatoire.

5. La notion de probabilité

Quant au concept de probabilité, il est passé comme celui du hasard, par des interprétations différentes mais complémentaires. En effet, nous trouvons les différentes définitions suivantes.

La définition **classique** qui a été donnée par Laplace et adoptée par d'autres mathématiciens part de l'a priori d'équiprobabilité et définit la probabilité comme suit: *"Si n éléments parmi N possibles et équiprobables sont favorables à un événement A, alors la probabilité de A est n/N"*.

Cette définition a certaines limites telles que sa restriction au cas fini, l'hypothèse de l'équiprobabilité qui n'est pas toujours vraie et qui peut, lorsque supposée, nous éloigner de la réalité. Enfin, le cercle vicieux provenant de cette même hypothèse, et qui suppose une définition de l'égalité de deux probabilités avant la définition même de cette dernière.

La définition **objective ou fréquentielle** a son origine dans les fondements de la méthode scientifique. Elle définit la probabilité comme étant la limite de la fréquence relative, f_n, d'un événement lorsqu'une expérience aléatoire qui peut éventuellement réaliser cet événement est répétée une infinité de fois.

Cette définition suppose deux hypothèses importantes. La possibilité de répéter indéfiniment l'expérience qui donne éventuellement notre événement et l'existence de la limite de f_n lorsque n est infiniment grand. Une limite de cette définition est qu'elle oblige de travailler avec des valeurs approchées de la probabilité, la valeur exacte étant toujours inaccessible puisque la première hypothèse est impossible à réaliser.

La définition **subjective** définit la probabilité comme une mesure du degré de croyance en un certain événement donné. Enfin, la définition **axiomatique** définit la probabilité comme une application p, qui vérifie les propriétés (axiomes):

1) p est comprise entre **0** et **1**
2) la probabilité d'un événement **certain** est égale à **1**
3) Si **E1, E2 ... En** sont n événements incompatibles, alors **p(E1 ou E2 ... ou En) = p(E1) + p(E2) + ... + p(En).**

Les propriétés de la définition axiomatique sont évidemment vérifiées dans tous les cas de définitions précédentes. Chacune de ces définitions met en relief une particularité du concept de probabilité qui n'est pas assez claire dans les autres définitions, d'où une complémentarité de ces différentes définitions de probabilité.

Avant de passer aux travaux didactiques sur l'apprentissage de probabilité, nous précisons brièvement notre conception de la connaissance et de l'apprentissage et le vocabulaire que nous utiliserons le long de notre étude.

6. Constructivisme et conception

Nous sommes partis du fait que la connaissance est une **construction** propre de l'individu et qu'elle ne peut pas lui être transmise par autrui. Cette construction est le fruit d'une interaction continue de l'individu avec son milieu externe (y compris le milieu scolaire). **L'apprentissage** est une organisation continue des expériences de l'individu, c'est une recherche continue de la **cohérence** des expériences **présentes** avec les connaissances construites à partir des expériences **antérieures**. Le processus de **compréhension** se situe à l'intérieur de l'activité d'apprentissage, une connaissance qui se construit peut correspondre à une façon de comprendre les éléments de la situation présente.

Certains chercheurs ont parlé de cette connaissance construite en terme de **conception**, de **primitive phénoménologique**, de **raisonnment spontané**, d'**intuition** ou en terme de **modèle mental**[4]. Ils s'accordent tous sur la nature constructible de la connaissance, mais ils divergent quant à la nature et au fonctionnement de cette construction.

Nous adopterons avec Janvier (1987) le nom de **conception** aussi bien que le sens qu'il lui associe:

> "Les conceptions sont des entités essentiellement dynamiques, ce sont des objets flous (vague, fluide), qui sont difficiles à distinguer des règles du raisonnement naturel et qui agissent sur des stimuli phénoménologiques en conjonction avec des principes appris".

Nous adoptons cette définition parce qu'elle correspond le mieux à notre processus de construction de la connaissance, processus que nous symbolisons par la fonction composée suivante:

F[c(image, action, langage, temps, espace...)]

La conception, **c**, se situe au carrefour de diverses composantes cognitives et sensorielles (**image, langage, action, temps, espace...**) et obéit à une logique sugérée par le contexte globale de la situation, **F**. C'est une interprétation des éléments de la situation.

7. Recherches didactiques

Plusieurs recherches ont traité de l'apprentissage et de l'enseignement de la notion de probabilités. Nous présenterons dans ce qui suit quelques-uns de ces travaux.

7.1 Travaux de Fischbein

Fischbein (1970, 1975, 1984) définissent l'intuition comme une acquisition cognitive qui, en vertu de son immédiateté, de sa globalité et de sa capacité extrapolatoire, intervient directement dans une action pratique ou mentale. C'est une évaluation ou une prédiction globale et synthétique, qui n'est pas justifiée explicitement. Une telle connaissance globale est vue par le sujet comme étant auto-évidente, auto-consistante et qu'on ne peut remettre en question. C'est en quelque sorte une croyance cognitive (cognitive belief). Quelquefois, cette croyance va coincider avec des constatations scientifiques et quelque fois, elle va les contredire.

---

[4] Pour plus de détails sur ces notions, se référer à notre mémoire de maitrise "conceptions probabilistes chez des élèves de 18-19 ans", UQAM, novembre 1990.

Fischbein (1970) distingue entre les intuitions primaires, qui dérivent de l'expérience primaire de l'individu sans aucun besoin d'instruction, et les intuitions secondaires ayant toutes les caractéristiques d'une intuition (immédiateté, globalité...), mais qui sont formées à partir d'une éducation ou d'une construction scientifique.

Fischbein (1975) décrit le développement des intuitions de hasard et de probabilité chez l'enfant. Contrairement à la thèse piagétienne, il affirme la présence d'intuitions primaires de hasard dans le comportement quotidien de l'enfant même avant l'âge de sept ans. Entre autres, il affirme l'existence de certaines intuitions erronées (des biais) qui sont construites sur la base de certains comportements probabilistes, qui sont à leur tour basés sur certains processus telles que la stéréotypie ou la "rencency"[5] positive, qui consiste à prédire le résultat, et le "recency" négative, qui consiste, au lieu de prédire ce même résultat, à prédire un résultat différent.

Fischbein (1984) s'intéresse à l'influence indirecte que peut avoir l'enseignement des probabilités sur les jugements probabilistes intuitifs. Une expérience[6] qu'il a menée avec des groupes d'élèves d'âge variant entre 10 et 14 ans et qui n'ont jamais reçu d'enseignement de probabilités auparavant, a mené à la conclusion que dans la majorité des cas, le programme d'enseignement a eu un effet indirect positif sur les biais intuitifs étudiés et qu'il a agi dans le même sens que l'âge, i.e. les élèves les plus vieux réussissent mieux que les plus jeunes.

Un point caractéristique de la méthodologie utilisée par Fischbein est celui de faire appel au dual **vrai/faux** ou **correct/incorrect**, ce, soit qu'il s'agisse de la formulation des questions du questionnaire ou des critères utilisés dans l'analyse et l'interprétation des réponses des sujets à ces questions.

Nous pouvons dire que les conclusions de Fischbein sont cohérentes avec le cadre théorique des intuitions, qui donne à la connaissance un aspect plus statique. Elles ne le sont pas avec notre cadre des conceptions, qui considère un processus plus dynamique de construction de la connaissance. Nous retenons de chez Fischbein l'existence de connaissances probabilistes préalables à tout enseignement de probabilités, le fait que ces dernières peuvent être ou non conformes au modèle scientifique enseigné et la possibilité de changer certaines des connaissances qui s'opposent à ce dernier, par le biais d'une intervention didactique. Nous retenons aussi de chez lui le fait que le développement des attitudes intuitives d'un individu, exige une implication personnelle et active de cet individu. Mais, nous avons une autre position quant à la nature de ces connaissances, à la façon dont elles fonctionnent et au procédé méthodologique utilisé pour s'assurer de leur changement.

---

[5] Nous nous sommes tenus de donner une traduction à ce mot, car nous ne sommes pas parvenus au mot français équivalent. Cependant, le sens que Fischbein donne à l'expression globale laisse croire que le mot "rencency" signifie comptage.

[6] Cette expérience consiste à donner un cours de probabilités au groupe expérimental et de comparer à l'aide d'un questionnaire les intuitions des sujets de ce dernier groupe et celles du groupe contrôle n'ayant reçu aucun enseignement de probabilité.

7.2 Travaux de Kahneman et Tversky

D. Kahneman et A. Tversky (1972) entreprennent l'étude exploratoire de ce qu'ils ont appelé "heuristique de représentativité"[7]. Leur thèse est que dans plusieurs situations, un événement A est jugé plus probable qu'un événement B chaque fois que A apparaît plus représentatif que B. En d'autres termes, le fait d'ordonner des événements suivant leurs probabilités subjectives coïncide avec celui de les ordonner suivant leur représentativité. Les expressions probabilités subjectives et représentativité restent toujours entourées d'une zone grise.

Par probabilité subjective, les auteurs entendent toute estimation de la probabilité d'un événement qui est donnée par un sujet ou inférée de son comportement. Ces estimations ne sont supposées satisfaire aucun axiome ou condition de consistance. En opposition à ceci, ils utilisent la notion de probabilité objective pour dénoter les valeurs calculées en se basant sur des assomptions pré-établies et répondant aux lois du calcul des probabilités.

D'après Fischbein, il existe dans les pratiques antérieures des sujets, des habitudes acquises qui rendent le calcul non nécessaire; et on ne peut donc pas savoir jusqu'où ce qu'on appelle ici "probabilité subjective", n'est pas influencé par ces calculs antérieurs. Il faut voir quel "degré d'image mentale" influence ou n'influence pas les probabilités subjectives (évidemment, on parle ici d'intuition), i.e. quelle est la base intuitive de tel ou tel jugement (la base intuitive se dit souvent d'une espèce de pratique antérieure à laquelle on ne recourt pas implicitement). Exemple: s'il y a plus de ceci et de cela, les calculs antérieurs ont toujours donné cela, on ne calcule pas la probabilité, mais on peut arriver à un jugement ou à une approximation plus ou moins proche de celle-ci sur la base de ces calculs antérieurs.

Donc, une probabilité subjective n'est qu'un jugement par lequel on formule une probabilité de manière approximative. C'est le cas par exemple, d'une personne qui, sans calcul, émet un jugement sur un événement et fournit une probabilité approximative ou compare deux probabilités. Donc, dans le subjectif, on a l'approximatif et on a le jugement, mais on a aussi un modèle sous-jacent, un modèle simpliste, en général fondé sur les expériences antérieures. Or ces dernières peuvent être variables: l'expérience d'un statisticien n'est pas la même que celle d'une autre personne quelconque.

---

7 Kahneman et Tversky (1972) ne précisent pas explicitement le sens du mot "heuristique". M. Shaughnessy (1977), qui a repris les travaux de Kahneman et Tversky, a défini ce mot comme étant "des stratégies par lesquelles une personne réduit un problème complexe de probabilité à un problème plus simple". Nous préférons considérer que c'est la méthode ou la stratégie de celui qui a un modèle simple et qui l'utilise dans une situation complexe.

Nous pensons que certains jugements se font à partir des habitudes et des connaissances antérieures qui fournissent d'une manière approximative une probabilité ou qui permettent de comparer des probabilités; c'est la probabilité subjective tel que Kahneman et Tversky la conçoivent. Il se peut donc que le mot subjectif ne soit pas le mot exact, puisqu'il y a des connaissances antérieures tout à fait diverses pour arriver à la formulation d'un jugement ou d'une estimation.

Aussi, quand on parle de probabilité subjective, faut-il spécifier qu'il s'agit d'un jugement subjectif, dans le sens qu'on ne fait pas de calcul, mais où on s'est basé sur une expérience antérieure qui, elle, peut relever du subjectif ou de l'objectif. C'est pour ceci que nous remettons en question cette dichotomie **subjectif/objectif** et que nous préférons traiter de la manière dont on a utilisé une conception, en l'occurence celle de la représentativité.

Aucune définition générale de la représentativité n'étant disponible, Kahneman et Tversky la comparent à la similarité perceptuelle tout en acceptant le fait qu'elle est plus facile à vérifier qu'à caractériser. Pour effectuer cette vérification, ils choisissent des situations où les gens s'accordent sur le fait qu'un événement a plus de chances de se produire qu'un autre et où eux, les auteurs, reconnaissent un choix basé sur une similarité avec un événement donné; i.e. l'événement choisi serait plus représentatif d'un événement ou d'un processus donné. Il ne s'agissait pas, pour les auteurs, de donner une échelle de représentativité, mais de considérer des cas où la mise en ordre des événements suivant une similarité ou une représentativité leur apparaissait évidente. Ils voulaient montrer que les gens jugent le plus représentatif comme étant le plus vraisemblable, et ce, qu'il le soit en réalité ou non.

Nous pensons que, associer la représentativité à une similarité perceptuelle peut s'expliquer de la façon suivante: porter un jugement de probabilité dite subjective, c'est chercher un type de similarité parmi plusieurs déjà établis; ceux-ci fournissent des espèces de "catégories potentielles" d'événements. En fait, nous croyons que la représentativité détermine nécessairement des catégories; seulement cette détermination peut avoir deux sens, elle peut être faite de deux façons différentes: la première correspond aux cas donnés par Kahneman et Tversky, et repose sur une connaissance déjà là. La deuxième façon de catégoriser se manifeste lorsqu'on donne aux gens 25 événements; ils peuvent former des regroupements, rassembler ceux qui sont semblables. Le fait même de faire ceci est déjà créer des catégories. En d'autres mots, cette détermination part soit de catégories déjà prêtes, soit d'une construction instantanée de ces catégories.

Dans leur exploration de cette "heuristique", Kahneman et Tversky sont partis de situations concrètes ayant des caractéristiques distinctives connues; ces dernières sont posées a priori. Ils ont présenté ces situations à des sujets n'ayant reçu aucun enseignement de probabilité, ces derniers devant juger de leur vraisemblable. Le but de ces activités étant de

mettre en évidence certaines caractéristiques déterminantes de la représentativité. C'est ainsi qu'ils sont arrivés à répartir les caractéristiques de "représentativité" ou de similarité, relatives à toutes les situations étudiées, en deux catégories principales:

- similarité de l'événement à la population dont il provient ou qu'il représente;
- sa similarité au "processus" par lequel il est généré; ici c'est du processus "aléatoire" dont il s'agit.

C'est-à-dire, l'estimation des chances d'un événement se base soit sur des paramètres ou sur certaines propriétés de la population que l'événement est supposé respecter pour être accepté comme un bon représentant de cette dernière; soit sur cetains aspects du caractère aléatoire de la situation, aspects que devraient posséder les événements.

Similarité de l'événement à la population:

Parmi les situations utilisées par Kahneman et Tversky (1972) pour rendre compte de ce type de représentativité, nous citons la suivante:

> Toutes les familles ayant 6 enfants, dans une ville, ont été interrogées. Dans 72 familles l'ordre exact des naissances des garçons et des filles était FGFGGF. Quelle est ton estimation du nombre de familles interrogées, où l'ordre exact des naissances est GFGGGG?

Ils trouvent que la majorité des sujets donne comme estimation un résultat inférieur à 72, bien que les deux séquences de naissances soient équiprobables. Selon les auteurs, plusieurs sujets croient que ces deux séquences ne sont pas équi-représentatives. Ils (les auteurs) expliquent ceci par le fait que la séquence avec 5 garçons et une fille ne reflète pas la proportion des filles et des garçons dans la population.

Comme premier déterminant de la représentativité, Kahneman et Tversky trouve donc la proportion des individus dans ce qui est proposé par rapport à celle de la population. Ils identifient un autre déterminant de la "représentativité", lié au premier: c'est lorsque l'événement garde la même relation de majorité-minorité que la population. Les auteurs s'attendent à ce qu'un événement qui garde cette relation soit jugé plus probable qu'un événement objectivement équiprobable et où cette relation n'est pas respectée. Ils ont utilisé le problème suivant pour illustrer ce type de "représentativité".

Dans une école, il y a deux sections A et B. Dans la section A, les garçons sont majoritaires, 65%. Dans la section B, ils sont minoritaires, 45%. Il y a le même nombre de classes dans les deux sections. Tu entres dans une classe au hasard, tu observes que 55% des

élèves sont des garçons. Est-ce que tu penses que cette classe appartient à la section A ou à la section B?

Puisque la majorité des élèves dans la classe sont des garçons, cette classe est plus représentative de la section A que de la section B et on devait donc juger qu'elle appartenait à la section A. C'est ce que confirme l'expérience: 67 élèves parmi 89 ont donné cette réponse. La réponse correcte est qu'il est légèrement plus vraisemblable que la classe appartienne à la section B, et ce puisque la variance pour $p = 0{,}45$ dépasse celle pour $p = 0{,}65$.

En résumé, dans cette première catégorie, nous retenons qu'il s'agit d'une "représentativité" dans laquelle est souvent spécifié un caractère numérique (proportion, pourcentage, moyenne...) de la population. Ce caractère est projeté sur différents "éléments candidats" à la représentativité de la population et peut dans certains cas, se présenter sous une forme primitive du type "beaucoup-peu". C'est ce qui se passe souvent dans le cas de la situation suivante:

Étant donné le processus binomial avec $p = 4/5$. Une majorité des sujets jugent l'événement de 10 succès et 0 échecs moins vraisemblable que celui d'avoir 6 succès et 4 échecs, quoique le premier soit en fait plus vraisemblable.

En effet, le deuxième événement, où toutes les catégories sont représentées, est jugé plus représentatif et subjectivement plus probable que le premier qui est objectivement plus probable mais où ne figure pas toutes les catégories de la population.

Réflexion du caractère aléatoire:

Ce type de représentativité part du fait que pour être représentatif, il n'est pas suffisant qu'un événement incertain soit similaire à sa population, il doit aussi refléter les propriétés du processus qui la généré. Il doit apparaître aléatoire, fortuit. Pour les auteurs, les deux propriétés générales qui semblent englober la notion intuitive de hasard sont l'irrégularité et la représentativité locale. Nous essayons de donner dans ce qui suit une caractérisation de ces deux propriétés.

De façon générale, l'irrégularité se situe parmi les caractéristiques majeures attribuées à l'aléatoire: elle peut être définie comme l'absence d'un schème régulier, ou d'un patron systématique. Si par exemple, on lance une pièce de monnaie plusieurs fois, une séquence de résultats de ces lancers, qui contient une régularité évidente du type PFPFPFPF... ou PPFPPFPPF... n'est pas représentative car elle ne reflète pas le caractère aléatoire du processus de lancer de la pièce. Les sujets interrogés dans Kahneman et Tversky (1972) jugent de telles

séquences comme relativement invraisemblables et les évitent lorsqu'ils produisent des simulations de hasard basées sur des lancers de pièce de monnaie.

La deuxième propriété attribuée au hasard est la représentativité locale. Souvent les gens s'attendent à ce que des séries courtes de lancers de pièces de monnaie contiennent à peu près le même nombre de piles et de faces. Plus généralement, un échantillon représentatif est celui où les caractéristiques essentielles de la population d'où il est tiré sont représentées, pas seulement d'une façon globale, i.e. dans l'échantillon entier, mais aussi d'une façon locale, i.e. dans chacune de ses parties.

Un exemple classique qui illustre bien cette notion de représentativité locale est celui de "Gambler's fallacy" (la duperie du joueur). Il s'agit d'un joueur qui, à la roulette, mise toujours sur les numéros qui ne sont pas encore apparus. Ceci est une manifestation de la représentativité locale, parce que le sujet croit que tous les résultats doivent être représentés dans une courte série de jeu.

Un autre exemple consiste en une anecdote liée au bombardement de London pendant la 2e guerre mondiale: les gens croyaient que le bombardement ne s'était pas fait au hasard, parce que quelques sections de la ville avaient été bombardées plusieurs fois, alors que d'autres sections n'avaient pas été bombardées du tout. Le schéma du bombardement ne respectait pas la représentativité locale, son caractère d'aléatoire lui était enlevé.

7.3 Travail de Sylvette Maury

Sylvette Maury (1984) a étudié l'influence de la nature du matériel utilisé, sur la probabilité associée par des élèves affrontés à des situations où il devait évaluer des probabilités. Elle a affronté des adolescents de 15 à 16 ans, qui n'ont pas encore reçu d'enseignement de probabilités, à des situations probabilistes quantitatives, utilisant différents types de matériel (roulettes, sacs de boules de couleurs différentes). Le langage utilisé est soit du type familier (chances, hasard...) soit du type technique (épreuve, probabilité, événement...). Elle leur demande de prévoir les probabilités de certains événements en justifiant leurs réponses.

Les résultats de l'expérimentation sont partagés en réponses justes, qui sont celles dont les arguments sont pertinents, en réponses fausses, dont les arguments sont non pertinents, et en réponses mixtes, dont l'argument rassemble un argument pertinent et un autre qui ne l'est pas. Voici trois exemples représentant respectivement les trois cas:

Exemple 1:
On a deux sacs; un avec une boule bleue et quatre rouges, l'autre avec trois bleues et six rouges; l'événement attendu étant les boules bleues.
La réponse: 1/5   3/9 = 1/3

Je choisirai le deuxième sac car mes chances sont plus grandes de tirer une boule bleue: 1 sur 3.

Exemple 2:
L'exercice est le même.
La réponse (fausse): je choisirai le deuxième sac car il y a plus de boules bleues que dans le premier sac donc plus de chances d'attraper une bleue.

Exemple 3:
Le même exercice mais avec le contexte roulette (i.e.: des roulettes à la place de sacs, les secteurs des roulettes remplacent les boules).
La réponse (mixte): je choisirai la roulette R2 car:
- la surface bleue est supérieure dans la deuxième roulette;
- le bleu est réparti en plusieurs secteurs dans la roulette 2.

Aussi, les arguments pertinents et non pertinents sont classés suivant les modalités utilisées et suivant la "conception" des élèves.

1) Les arguments pertinents:
- L'argument **"aire"**.
  Exemple: l'argument 1 de l'exemple 3.

- L'argument **"cas favorables / cas possibles"**.
  Exemple: l'exercice étant celui de l'exemple 3, la réponse est: je choisirai R2 car le bleu couvre 1/5 de R1 et 3/9 de R2; ce qui fait 9/45 pour R1 et 15/45 pour R2, il y a donc plus de bleu pour R2.

- L'argument **"cas favorables / cas défavorables"**.
  Exemple: même exercice que précédemment la réponse étant: pour avoir plus de chance que l'aiguille indique la couleur bleue, il faut choisir R2 puisque pour trois parties bleues il y en a six rouges (à chaque partie bleue correspond deux parties rouges), tandis que sur R1 il y a une partie bleue pour trois rouges.

2) Les arguments non pertinents:

- L'argument **"répartition"** associé surtout aux roulettes.
  Exemple: l'argument 2 de l'exemple 3.

- L'argument **"différence"** utilisé surtout avec les boules.
  Exemple: ayant deux sacs, le premier avec 2 boules bleues et 4 rouges, le deuxième avec 4 bleues et 9 rouges, un élève répond comme suit: "pour avoir plus de chance d'avoir une rouge, je choisis S2 car il a cinq boules rouges de plus que les boules bleues, tandis que dans S1 il n'y en a que deux de plus".

- Argument **"cas favorables"** où l'élève compare seulement les cas favorables et choisit celui qui a le plus de cas favorables.

L'argument **"cas favorables / cas possibles"** n'est essentiellement utilisé qu'avec les roulettes et l'argument **"cas favorables / cas défavorables"** n'est essentiellement utilisé qu'avec les boules. Ce fait est interprété de la façon suivante: pour les boules la considération du tout et donc du nombre de cas possibles ne s'imposant pas, la procédure qui consiste à effectuer le rapport entre le nombre de cas favorables et celui des cas possibles est défavorisée, tandis qu'avec les secteurs des roulettes pour lesquels le tout a un sens (roulette), la prise en compte des cas possibles est favorisée.

Au terme de son étude, l'auteure arrive à la conclusion que dans la résolution de problèmes, de nombreux facteurs autres que ceux liés à la structure mathématique du problème sont susceptibles d'influencer les comportements des élèves; ces facteurs sont liés au matériel utilisé pour représenter la situation probabiliste, ce matériel pouvant avoir des caractéristiques capables d'agir sur les "conceptions" de l'élève. L'auteure déduit de ce qui précède que les élèves possèdent plusieurs conceptions probabilistes spontanées qui peuvent être sollicitées en variant le contexte d'une situation.

Bien que nous partageons toutes les positions de cette dernière conclusion, nous tenons à donner certaines précisions méthodologiques qui nous sont apparues fondamentales. L'âge des sujets, avec qui S. Maury a travaillé, se situe, suivant la répartition de Piaget, dans le stade de la pensée formelle du développement, qu'il s'agisse du développement des notions probabilistes ou des notions de proportionnalité. Ceci, ajouté à la nature du matériel utilisé, peut expliquer que certains modèles de quantification des sujets s'orientent vers le raisonnement proportionnel. Et l'investigation de Maury nous intéresse d'autant plus qu'elle met non seulement en relief la variété des façons de manifester ce dernier, mais aussi la non pertinence de certaines constructions des élèves. Pour S. Maury, c'est le matériel utilisé qui suggère le modèle, mais nous ne croyons pas que ce soit la seule origine. Nous croyons que dans ces cas, où se manifeste le raisonnement proportionnel, il serait profitable de mener des entrevues avec les

élèves, dans le but explicite de savoir si c'est le matériel ou un autre facteur qui a le plus agi.

Nous situons le travail de Sylvette Maury dans le cadre de l'influence du contexte globale sur la modélisation mentale de la situation par le sujet. En effet, c'est le contexte globale formé par le système "Représentations internes du sujet - situation décrite et matériel utilisé" qui joue ici. Ce contexte joue le rôle de la fonction F, dans notre modélisation de la conception et sert de cadre générale de la conception.

7.4 Travaux de J.-M. Lecoutre et al.

J.M. Lecoutre et al. (1988) quant à eux, ont étudié le biais d'équiprobabilité. Ils ont tenté de déterminer les différents arguments que les sujets utilisent pour répondre au 3 problèmes qui vont suivre. Ils se sont basés sur les réponses argumentées de 342 lycéens âgés de 14 à 18 ans et n'ayant reçu aucun enseignement en théorie des probabilités, aux trois problèmes suivants:

P1: On lance un dé rouge et un dé bleu; on considère les deux résultats:
R1: on obtient un 5 avec le dé rouge et un 6 avec le dé bleu;
R2: on obtient un 6 avec le dé rouge et un 6 avec le dé bleu.

P2: On lance un dé rouge et un dé bleu; on considère les deux résultats:
R1: on obtient un 6 avec le dé rouge et un 5 avec le dé bleu;
R2: on obtient un 6 avec le dé rouge et un 6 avec le dé bleu.

P3: On lance deux dés jaunes et on considère les deux résultats:
R1: on obtient un 5 et un 6;
R2: on obtient deux fois un 6.

Pour répondre à ces problèmes, le sujet doit choisir une réponse parmi les suivantes:

(a) il y a autant de chance d'obtenir un des deux résultats;
(b) il y a plus de chance d'obtenir le résultat R1;
(c) il y a plus de chance d'obtenir le résultat R2;
(d) il est impossible de se prononcer.

Dans la classification des résultats, les auteurs ont tenu compte de deux critères:

(1) L'identification des "modèles"[8] a été faite à partir des réponses aux deux premiers problèmes, et ce en prenant parmi tous les patrons de réponses données, ceux où il y a la même réponse aux deux problèmes.

(2) Le problème 3 est utilisé pour tester la valeur prédictive des différents modèles (ce qui est discutable, à notre avis), cette valeur étant évaluée en fonction de la proportion des sujets donnant à **P3** la réponse attendue selon ce modèle. La valeur prédictive d'un modèle étant d'autant meilleur que cette proportion est élevée.

Dans cette investigation, les auteurs dégagent cinq modèles classés suivant le patron cohérent de réponses données aux deux problèmes **P1** et **P2** et dont les noms proviennent directement des justifications données par les sujets.

Le patron de réponses "+R1 +R1": de ce patron, se dégage un modèle qui a été nommé "doubles, plus rares" et selon lequel, le résultat R1 est plus probable que le résultat R2. La justification la plus fréquente est qu'en général, il y a plus de chance d'obtenir deux chiffres différents qu'un double.

Les auteurs lient ce modèle à "l'heuristique" de représentativité déjà discutée, et spécialement à la représentativité de la population. Chacun des résultats est assimilé à une catégorie plus large de résultats: le double est assimilé à l'ensemble de tous les doubles et l'autre à l'ensemble des résultats comportants deux éléments différents. L'utilisation de ce modèle par les sujets conduit à donner, au problème type **P3**, la même réponse R1 qui se trouve alors correcte.

Le patron de réponses "+R2 +R2": de ce patron, deux modèles sont dégagés. Ils ont été nommés successivement modèle "condition supplémentaire" et modèle "doubles plus faciles".

Selon le premier, on a plus de chance d'obtenir le résultat **R2** parce que pour donner ce résultat, les dés doivent satisfaire à une seule condition portant sur les nombres (chaque dé donne un 6), alors que pour donner le résultat R1 les dés doivent satisfaire non seulement à une condition portant sur les nombres (5 ou 6), mais en outre à une condition supplémentaire portant sur la couleur des dés (comme pour le résultat R1 et **P1**, le 5 est obtenu par le dé rouge et le 6 par le dé bleu). L'application de ce modèle a donné au problème type **P3**, la réponse incorrecte

---

[8] Nous gardons l'appélation utilisée par les auteurs. Ces derniers n'ont pas donné de définition de ce qu'ils ont appelé modèle, mais ils faisaient correspondre chaque modèle à une classe d'arguments utilisés par les élèves.

d'équiprobabilité, car pour ce problème, il n'y a plus de condition portant sur la couleur des dés.

Selon le deuxième modèle, "doubles plus facile", il y a plus de chances d'obtenir le résultat R2, car d'une façon générale, les doubles sont jugés "plus fréquents" ou "plus probables", ou "encore plus faciles à obtenir". L'application de ce modèle conduit à la réponse R2 pour P3. Comparé au modèle précédent, la valeur prédictive de ce modèle est faible: 50% des sujets donnent la réponse attendue, alors que pour l'autre 92% ont donné la réponse attendue.

Le patron de réponse "= =": pour ce patron, deux modèles, parmi plusieurs, sont retenus, le modèle "hasard" et le modèle "une chance par résultat".

Dans cette catégorie, le modèle "hasard" est largement majoritaire. Il rend compte à lui seule de 65% des patrons d'équiprobabilité justifiés. Selon ce modèle, des événements aléatoires sont "par nature" équiprobables; le plus souvent l'argumentation donnée est du type: "c'est le hasard", "c'est le fait du hasard"... L'application de ce modèle conduit à l'équiprobabilité comme réponse au problème type P3. La valeur prédictive de ce modèle qui contribue le plus massivement du biais d'équiprobabilité.

Selon le modèle "une chance par résultat" (modèle correct), les deux résultats à comparer, R1 et R2, sont équiprobables car pour chacun d'eux on a "une chance", "une possibilité", "un résultat = une possibilité"... Ce modèle repose sur une argumentation correcte qui consiste à comparer les chances associées à chacun des deux résultats R1 et R2. Il conduit à donner au problème type la réponse correcte +R1. Sa valeur prédictive est de 89%.

Au niveau cognitif et concernant la formulation des modèles et leur interprétation, Lecoutre et Durand se sont limités à la description et au regroupement des justifications des élèves. Les origines du biais sont alors explorées à un degré minimal, indépendamment des connaissances antérieures des sujets et des autres composantes de la situation. On aurait pu se demander ce que les exercices présentés, dans leur particularité, permettent et ce qu'ils ne permettent pas d'explorer: comparons par exemple les situations précédentes à la situation suivante:

> Étant donné deux formules d'un jeu qui consiste à lancer deux dés; dans l'une tu gagnes si tu as deux six, et dans l'autre, tu gagnes si tu as un 5 et 6. Suivant quelle formule choisis-tu de jouer?

Au niveau conceptuel, ils se sont limités à la notion de probabilité bien que les justifications des élèves contenaient ou sous-entendaient d'autres notions telle que celle de hasard ou celle de mesure. En effet, la notion de hasard signalée dans plusieurs justifications a

été supposée acquise et connue. Aucun problème pouvant provenir de la signification de ce mot n'a été souligné, alors que la conception d'équiprobabilité peut provenir d'une conception directement liée à la notion de hasard.

II- CADRE THÉORIQUE: Nos conceptions hypothétiques et nos objectifs

L'analyse de ces travaux, l'analyse conceptuelle des notions de hasard et de probabilités ainsi que certaines remarques sur des phénomènes sociaux associés aux notions de hasard et de probabilités, nous ont amené à formuler diverses conceptions erronées. Certaines de ces dernières portent sur le hasard, d'autres sur la probabilité et d'autres encore, peuvent amalgamer des caractéristiques relatives aux deux notions. Ces conceptions ont été testées à l'aide d'un questionnaire et des entrevues administrés à deux groupes d'élèves de 18-19 ans. Un des groupes n'ayant pas reçu d'enseignement de probabilités, l'autre ayant suivi un cours de probabilités de niveau pré-universitaire. Le questionnaire a précédé les entrevues. Ces dernières essayaient d'apporter les informations nécessaires pour mieux illucider les résultats apportés par le questionnaire.

1. Les conceptions étudiées

a) Le hasard se trouve plus dans l'activité ludique

Cette conception consiste à associer le fortuit aux jeux de hasard et pas à d'autres phénomènes tels que celui de la pluie ou celui de gain ou de perte d'une équipe dans un sport particulier.

Pour tester cette conception, nous avons utilisé deux questions, l'une demande de donner deux exemples d'événements dus au hasard **(Q1)**, l'autre donne des événements et demande s'ils sont ou non dus au hasard **(Q7)**. Parmi ces derniers, nous citons les suivants:

La pluie tombera demain.
Ton équipe gagnera le match.
L'ami avec qui tu as rendez-vous, arrivera à l'heure?
L'ami avec qui tu as rendez-vous, arrivera en retard?

b) Contrôle du hasard

Cette conception "contrôle du hasard" consiste à croire qu'une personne qui joue souvent aux jeux de hasard acquiert des habiletés et des stratégies qui l'aident à gagner ou à augmenter ses chances de gain. Donc c'est une conception qui, dans le contexte des jeux de hasard, croit en un certain contrôle du hasard par l'expérience et la pratique de ces jeux.

Pour tester cette conception, nous avons posé les élèves dans une situation de choix entre différentes personnes qui ne diffèrent que par leur expérience du jeu. Une de ces personnes n'a jamais joué, l'autre a joué et gagné plusieurs fois, une troisième a joué sans jamais gagner. La question était: si tu avais à demander les chiffres d'une combinaison de lotto, à qui parmi ces trois personnes tu vas t'adresser? (**Q2** du questionnaire).

c) Équiprobabilité - refus de la mesure

C'est une conception qui lie l'équiprobabilité à l'ignorance qui entoure les phénomènes fortuits, cette dernière étant distribuée également sur les différents résultats possibles. Nous soulignons ici le fait que cette conception ne nécessite pas obligatoirement une connaissance effective de tous les résultats possibles, mais elle peut les juger équiprobables sans tous les savoir. C'est cette conception-là que nous avons traduite par un refus de la mesure (mesure statistique ou combinatoire). D'autres conceptions de l'équiprobabilité peuvent être rencontrées. En effet, cette dernière peut être traduite par l'égale possibilité d'apparition des différents résultats possibles; par une égalité entre les chances d'apparition et celle de la non apparition d'un résultat particulier (chaque résultat peut apparaître comme il peut ne pas apparaître et ces deux possibilités ont les mêmes chances, d'où tous les résultats ont les mêmes chances d'apparaître). Dans ces deux derniers cas, la connaissance de tous les résultats possibles n'est pas non plus nécessaire. Dans certains cas où les résultats possibles et/ou leur nombre, n, sont connus, l'équiprobabilité est exprimée en terme de chances, par: "chaque résultat a une chance sur n de se réaliser".

Pour tester les conceptions sur l'équiprobabilité, nous avons utilisé des questions de nature différente:

> Pourquoi au 6/49, tu choisis une combinaison au lieu d'une autre? Est-ce parce qu'elle a plus de chance? Est-ce que tu choisis une combinaison quelconque parce qu'elles ont toutes les mêmes chances ou est-ce que tu choisis une quelconque parce que tu n'as aucune idée des chances d'apparition des résultats? (Question 8 du questionnaire).
>
> En lançant un dé, quelle est la probabilité d'apparition de la face 5?

En lançant une pièce de monnaie, quelle est la probabilité d'apparition de la face pile?
Et maintenant si je lance une punaise, a-t-elle plus de chance de tomber sur le côté ou sur la base?
(questions d'entrevues).

d) Représentativité de la population

Certains jugements probabilistes se basent sur des caractéristiques numériques (proportions, moyenne, pourcentage, mode,...) ou descriptifs (mélange de couleurs, ...) de la population dont le résultat jugé provient, ce dernier étant d'autant plus probable qu'il est plus représentatif de la population, ou plus précisément, de la caractéristique en question. Parmi les questions utilisées pour tester cette conception, nous citons la suivante **(Q3)**:

D'un énorme sac, contenant 30000 balles blanches et 60000 balles noires, on tire 6 boules en même temps. Pour chacun des résultats suivants, dire s'il est:

	1 fort probable	2 probable	3 peu probable	4 impossible
a) BNNBNN	❑	❑	❑	❑
b) BBBNBN	❑	❑	❑	❑
c) BBBBNB	❑	❑	❑	❑
d) BBBBBB	❑	❑	❑	❑

La question **Q12** du questionnaire reprend cette même question dans le cas où le sac contient 50000 billes de chaque couleur.

Lors des entrevues, des justifications des réponses à ces deux questions ont été demandées aux élèves.

e) Représentativité du processus du hasard

Dans d'autres cas, les jugements probabilistes se basent sur les caractéristiques que les élèves associent eux-même au processus du hasard. Ainsi une combinaison aussi régulière et aussi restreinte que **1 2 3 4 5 6** n'a pas autant de chance d'apparaître comme résultat gagnant à la lotto qu'une autre plus irrégulière et prenant ses nombres un peu partout dans l'ensemble des 49 nombres. De même, un résultat aussi ordonné que **BNBNBNBNBNBN** n'a pas beaucoup de chance de sortir lors d'un tirage successif avec remise d'une boule; le tirage étant fait dans un sac contenant une boule noire et une blanche.

Pour tester cette conception, nous avons présenté aux sujets plusieurs situations parmi lesquels les résultats précédents. Nous leur avons demandé de comparer leurs chances à celles d'autres résultats ne représentant aucune régularité.

2. Les objectifs

Les objectifs de notre travail se divisent en deux classes. La première classe d'objectifs est à caractère théorique. Dans cette dernière, nous visons à situer les travaux étudiés dans le cadre d'une même théorie de l'apprentissage. D'où le souci de traduire en termes de conceptions, tous les résultats et idées de ces travaux.

Le fait de faire appel à un cadre théorique commun, ici le cadre constructiviste, est à notre avis d'une importance majeure, parce qu'il permet de normaliser le langage de tous les travaux et de mettre en évidence leurs ressemblances et leurs convergences. Aussi nous envisageons que les éléments caractéristiques de ce cadre constructiviste, qu'il s'agisse des caractéristiques épistémologiques ou méthodologiques, permettent de creuser davantage et de compléter les connaissances apportées par ces recherches sur les différentes conceptions que nous avons spécifiées. Ceci justifie notre reprise de certaines conceptions déjà étudiées dans les travaux examinés.

La deuxième classe d'objectifs est à caractère pratique et vise d'une part l'examen des conceptions probabilistes "erronées" et la vérification de leur existence, chez des élèves du secondaire; et d'autre part l'examen de leur résistance au changement. C'est dans ce cadre que se situent les conceptions hypothétiques formulées dans la section précédente.

L'investigation de la notion de hasard d'une façon directe et indépendante de celle de probabilité vise l'identification des différentes conceptions de cette notion, ainsi que leurs relations avec les conceptions probabilistes. L'examen des différentes conceptions de mesure, équiprobabilistes ou non, vise d'une part, à approfondir et à compléter les résultats des autres travaux au sujet de ces conceptions et d'autre part, essaie de trouver les origines de ces conceptions et plus particulièrement celles de leur caractère "erroné".

III- LES QUESTIONS DU QUESTIONNAIRE[9]

Nous donnons dans ce qui suit l'ensemble des questions du questionnaire utilisé pour tester ces conceptions et parmi lesquelles nous choisirons celles qu'on va analyser dans cet article.

1. Donner deux exemples d'événements dus au hasard.

1)
2)

Définition du jeu de tirage

Pour encourager les spectateurs à poursuivre une émission de télévision, on demande à ces derniers de choisir 6 nombres entre 1 et 49 et d'envoyer leur choix à l'émission. Pendant cette dernière, on fait un tirage de 6 nombres entre 6 et 49 et on compare le résultat avec les choix des spectateurs et s'il arrive que l'un de ces choix coïncide avec le résultat du tirage de l'émission, l'auteur de ce choix est déclaré gagnant et reçoit une récompense en argent. C'est toute cette opération qu'on appelle "jeu de tirage".

2. Tu veux participer au "jeu de tirage". Tu connais trois personnes. La première a déjà participé et gagné à ce jeu plusieurs fois, la deuxième a déjà participé plusieurs fois, mais n'a jamais gagné, la troisième n'y a jamais participé. Lors de ton choix des 6 nombres, à qui demanderas-tu de te proposer des chiffres?

1) à la première personne; ❑
2) à la deuxième personne; ❑
3) à la troisième personne; ❑
4) à l'une quelconque des trois personnes; ❑
5) tu te fies à ton propre choix. ❑

3. D'un énorme sac contenant 30000 billes blanches, et 60000 billes noires, on tire six billes ensemble. Devant chacun des résultats suivants, noter s'il est:

---

[9] Pour les étapes de construction de ce questionnaire, voir notre mémoire dont la référence est citée dans la note 4.

	1 fort probable	2 probable	3 peu probable	4 impossible
a) BNNBNN	❑	❑	❑	❑
b) BBBNBN	❑	❑	❑	❑
c) BBBBBN	❑	❑	❑	❑
d) BBBBBB	❑	❑	❑	❑

La lettre B signifie une boule blanche et la lettre N signifie une boule noire.

4. On a deux roulettes R1 et R2, divisées en quatre secteurs égaux numérotés de 1 à 4 (voir le dessin sur le tableau). À chaque fois que l'on tourne ces deux roulettes, on obtient deux chiffres et on note la différence du plus grand moins le plus petit, et s'ils sont égaux, le résultat est zéro. Parmi les chiffres suivants, encadrer ceux qui sont les résultats possibles de cette opération.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

On effectue cette opération plusieurs fois. Le jeu consiste à deviner le résulat du maximum possible des opérations avant même de les effectuer. Si on te demande de participer à l'une des opérations de ce jeu, quel chiffre vas-tu proposer?...

Est-ce que:

1) tu le choisis parce que tu crois qu'il a plus de chance d'apparaître? ❑
2) tu choisis n'importe lequel de ces résultats parce que tu crois que tous les résultats ont les mêmes chances d'apparaître? ❑
3) tu prends le risque de choisir n'importe quel résultat sans avoir une raison précise? ❑
4) tu le choisis pour une autre raison? ❑
   Explicite-la:

5. Si on considère qu'un nouveau-né a la même chance d'être un garçon que d'être une fille et si on choisit au hasard une famille de 6 enfants, laquelle des successions suivantes a le plus de chance de se réaliser à l'intérieur de cette famille?

1) GFFGFG; ❑
2) GGGGFG; ❑
3) GGGFFF; ❑

4) toutes ces séquences ont à peu près les mêmes chances de se réaliser; ❑
5) deux seulement ont la même chance de se réaliser. ❑
Précise lesquelles:

6. Dans une école, on a deux sections A et B. Dans la section A, les garçons sont majoritaires, ils représentent 65%; dans la section B, ils sont minoritaires, ils représentent seulement 45%. Il y a le même nombre de classes pour les deux sections. On entre dans une classe choisie au hasard, et on trouve que 55% sont des garçons. Selon toi, y a-t-il plus de chance que cette classe soit de la section A ou de la section B?

1) je crois qu'elle provient de la section A plutôt que de B; ❑
2) je crois qu'elle provient de la section B plutôt que de A; ❑
3) il y a autant de chance que la classe provienne de la section A que de la section B; ❑
4) on ne peut pas juger. ❑

7. Pour les événements suivants, dire s'ils sont dus au hasard ou non.

1) tu obtiens un "6" lorsque tu lances un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6;	Oui ❑	Non ❑
2) tu obtiens un "5" lorsque tu lances un dé dont toutes les faces sont numérotées "5";	Oui ❑	Non ❑
3) l'ami avec qui tu as rendez-vous arrive à l'instant prévu;	Oui ❑	Non ❑
4) l'ami avec qui tu as rendez-vous arrive en retard;	Oui ❑	Non ❑
5) tu obtiens cinq fois "pile" lorsque tu lances cinq fois une pièce de monnaie;	Oui ❑	Non ❑
6) tu as un accident d'automobile;	Oui ❑	Non ❑
7) tu as la même date d'anniversaire que quatre de tes camarades;	Oui ❑	Non ❑
8) lundi prochain sera un jour de fête;	Oui ❑	Non ❑
9) tu gagne au jeu de tirage;	Oui ❑	Non ❑
10) il pleuvra demain;	Oui ❑	Non ❑
11) ton équipe gagnera un match.	Oui ❑	Non ❑

8. Comment choisis-tu une combinaison au "jeu de tirage"?

1) je choisis celle que je crois avoir le plus de chance d'apparaître; ❑
2) je fais un choix au hasard, parce que tu crois que toutes les ❑

combinaisons ont la même chance d'apparaître;

3) je fais un choix au hasard parce que je n'ai aucune idée des chances d'apparition des combinaisons; ❑

4) mon choix est motivé par une autre raison. ❑
Précise laquelle:

9. Au "jeu de tirage", la combinaison "2 34 5 11 3 19" vient de sortir deux fois; qu'est-ce qui peut se passer durant les semaines à venir?

1) cette combinaison aura de grandes chances de sortir; ❑
2) elle aura de faibles chances de sortir; ❑
3) elle aura les mêmes chances de sortir que toutes les autres; ❑
4) on ne peut connaître à l'avance les chances qu'a une combinaison de sortir. ❑

10. Une personne possède une chatte qui a dix chatons, elle ne connaît pas leurs sexes. Cette personne tient le raisonnement suivant: "puisqu'il y a 50% de chance pour chacun des chatons d'être mâle ou femelle, alors il y a plus de chance d'avoir cinq mâles et cinq femelles que d'avoir quatre mâles".

Est-tu d'accord avec ce raisonnement? Oui ❑ Non ❑
Pourquoi?

11. Quand il participe au jeu de tirage, Ahmed choisit la combinaison **1 2 3 4 5 6**, car il croit qu'elle augmente ses chances de gagner. Quant à Ali, il pense autrement et croit que ses chances sont plus grandes s'il choisit un résultat avec des nombres non successifs. Si tu avais à choisir un résultat, partagerais-tu l'opinion d'Ahmed?

1) oui, parce que je suis d'accord avec Ahmed; ❑
2) non, parce que je suis d'accord avec Ali; ❑
3) oui, parce que je crois que le résultat **1 2 3 4 5 6** me donne les mêmes chances que tous les autres; ❑
4) non, parce que je crois que le résultat 1 2 3 4 5 6 me donne les mêmes chances que tous les autres; ❑
5) comme je n'ai aucune idée, je choisirai 1 2 3 4 5 6 aussi bien qu'un autre résultat; ❑
6) j'ai une autre réponse. ❑
Laquelle?

12. D'un énorme sac contenant 50000 billes blanches, et 50000 billes noires, on tire six billes ensemble. Devant chacun des résultats suivants, noter s'il est:

	1 fort probable	2 probable	3 peu probable	4 impossible
a) BNNBNN	❑	❑	❑	❑
b) BBBNBN	❑	❑	❑	❑
c) BBBBBN	❑	❑	❑	❑
d) BBBBBB	❑	❑	❑	❑

La lettre B signifie une boule blanche et la lettre N signifie une boule noire.

13. En lançant quinze fois une pièce de monnaie, le côté "face" apparaît quinze fois. À ton avis, lors du seizième lancer,

1) les chances d'apparition du côté face seront les plus grandes; ❑
2) les chances d'apparition du côté pile seront les plus grandes; ❑
3) les deux côtés auront les mêmes chances d'apparaître. ❑

14. Un sac contient autant de boules blanches que de boules noires. On tire successivement vingt boules de ce sac, en remettant à chaque fois la boule tirée dans le sac. Quelle est parmi les résultats:

(1) BNBNBNBNBNBNBNBNBNBN et (2) NNBNBBBNBNNNBBNBNNBB le plus probable?

1) le résultat (1) est plus probable que le résultat (2); ❑
2) résultat (2) est plus probable que le résultat (1); ❑
3) les résultats (1) et (2) ont les mêmes chances de se réaliser. ❑

B: boule blanche N: boule noire

15. Si on lance d'un seul coup dix dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note les résultats portés par les faces supérieures de chacun des dés, d'après toi, laquelle des propositions suivantes est correcte?

1) les chances pour que tous les dés donnent le résultat "5" sont plus grandes ❑
que celles d'obtenir des résultats différents;
2) les chances pour que tous les dés donnent le résultat "5" sont plus petites ❑
que celles d'obtenir des résultats différents;
3) les chances pour que tous les dés donnent le résultat "5" sont les mêmes ❑
que celles d'obtenir des résultats différents.
Justifie ta réponse

16. Dans une ville, l'âge moyen de la population est 50 ans. On choisit deux personnes au hasard.

1) les chances pour que l'un ait 15 ans et l'autres 25 ans sont plus grandes ❑
que celle pour que les deux personnes aient des âges toutes les deux
proches de 50 ans;
2) les chances pour que l'un ait 15 ans et l'autre 25 ans sont plus petites ❑
que celle pour que les deux personnes aient des âges toutes les deux
proches de 50 ans;
3) les chances pour que l'un ait 15 ans et l'autre 25 ans sont les mêmes ❑
que celle pour que les deux personnes aient des âges toutes les deux
proches de 50 ans;
4) j'ai une autre réponse. ❑
Laquelle:

17. Ali et Ahmed font tourner une roulette divisée en six secteurs égaux dont trois sont colorés en rouge, et les autres en noir. Ali attend toujours que se réalise une longue série de rouge pour parier sur le noir. Qu'est-ce que tu penses de la méthode d'Ali?

1) elle augmente ses chances de gagner; ❑
2) elle diminue ses chances de gagner; ❑
3) elle n'influence en rien ses chances de gagner. ❑

IV- LES RÉSULTATS

Nous donnons dans ce qui suit les résultats des deux groupes à certains des items du questionnaire, ainsi qu'une analyse et une interprétation sommaires de ces résultats. Les symboles G1 et G2 seront utilisés pour signifier respectivement le groupe sans enseignement et le groupe avec enseignement. La numérotation des questions est celle du questionnaire.

Notion de hasard

Q1[10]:

	J-J	J-Nj	Nj-Nj
G1	**0%**	14%	**86%**
G2	23%	25%	**52%**

Les exemples de non jeux dominent dans les deux groupes et surtout dans le groupe G1. Ceux des jeux sont presque absents dans ce même groupe. Ceci s'oppose à nos attentes de départ, qui favorisent les jeux. Ce sont les attributs et les signifiants linguistiques du mot hasard qui se sont le plus montrés. Ceci peut être dû à la présence du mot hasard dans la question et dont l'utilisation chez les sujets s'est toujours limitée à des situations de la vie courante; situations qui représentent les caractères de coïncidence, d'imprévu, de rare...

Q7.10: (La pluie tombera demain, est-ce du au hasard ou non?)

	N	O
G1	39.5%	**60.5%**
G2	**64.7%**	35.3%

Q7.11: (Ton équipe gagnera le match, est-ce dû au hasard?)

	N	O
G1	**52.4%**	**47.6%**
G2	**76.9%**	23.1%

Dans les deux cas, ce sont les sujets qui ont eu un enseignement qui nient le plus la composante hasard dans ces deux événements. Pour les autres; l'événement de la pluie est plus fréquemment associé au hasard que celui du gain du match.

En quoi l'enseignement a pu influencer cette attitude pour donner une forte tendance à opter pour une négation du caractère aléatoire de ces deux événements? Est-ce le développement d'une tendance objective et déterministe chez les élèves? (recherche des causes de gain, études de la météo...). Est-ce une conception sous-entendue dans l'enseignement reçu des probabilités et qui consiste à croire à un contrôle de ce dernier par l'action de l'étude des probabilités?

Nous retrouvons ici un cas analogue à celui déjà mentionné dans Fischbein (1984), à savoir, l'influence de l'âge. La majorité des sujets vus en entrevues et surtout de ceux qui ont reçu un enseignement de probabilité développent l'opinion suivante: une fois que les causes

[10] Cette question demande de donner deux exemples d'événements dus au hasard. Les catégories de réponses seront désignées par les signes **J-J, J-NJ, NJ-NJ** qui signifient respectivement: les deux exemples donnés sont des exemples empruntés aux jeux de hasard, un des exemples est emprunté aux jeux alors que l'autre ne l'est pas, aucun des deux exemples n'est emprunté aux jeux de hasard.

d'un phénomène sont objet de notre étude (la pluie) ou de notre volonté (les causes du gain du match), il ne peut plus être dû au hasard. Ceci témoigne d'une attitude déterministe du type discuté par Poincaré.

Contrôle du hasard (j = jamais; qcq = quelconque)

Q2:

	a gagné	j gagné	j joué	à 1 qcq	à personne
G1	31%	4.8%	19%	16.7%	28.6%
G2	30.8%	1.9%	7.7%	1.9%	57.7%

Le pourcentage associé au premier choix (31%) est le même dans les deux groupes. Ceci montre d'une part la présence assez marqué de la conception en question et d'autre part, sa résistance au changement, même sous l'impact d'une intervention didactique[11]. Par contre, nous remarquons un changement au niveau des autres choix de réponse. Le pourcentage restant dans **G1** est partagé sur les choix 3 (à celle qui n'a jamais joué), 4 (à l'une quelconque des trois personnes), et 5 (se fier à son propre choix), alors que dans **G2**, il s'est concentré en majorité sous le choix 5. Nous traduisons ces constatations par une stabilité des idées probabilités plus grande chez ceux qu'ont reçu un enseignement de probabilités que chez les autres. Ceci semble être une influence indirecte de l'enseignement.

Équiprobabilité

Q4: (les deux roulettes)

	+ de chance	chance (=)	pas d'idée
G1	31.8%	15.9%	22.7%
G2	51.9%	21.2%	15.4%

Les pourcentages complémentaires qui manquent, correspondent au choix 4 qui figure pas sur le tableau. Le premier choix est le plus fréquent dans les deux groupes, il l'est beaucoup plus dans **G1** que dans **G2**. Le choix de l'équiprobabilité est moins fréquent par rapport au premier, ce dans les deux groupes. Son pourcentage est plus grand dans **G2** que dans **G1**. Ceci est un résultat qui n'est pas facile à interpréter. Le développement d'un automatisme équiprobabiliste chez les sujet qui ont eu un enseignement de probabilités est une suggestion de réponse à cette question.

---

11 Nous laissons ouverte la justification de cette résistance tout en signalant que déjà, on peut dire qu'elle est due soit à la force de la conception ou au fait de ne pas la prendre en considération dans l'enseignement donné.

Q8[12]: (les deux roulettes)

	>	=	pas d'idée
G1	26.8%	29.3%	**43.9%**
G2	**574.%**	14.9%	27.7%

Le résultat le plus remarquable ici est le pourcentage de **G2**, associé au premier choix de réponse. Ceci laisse entendre, chez les sujets qui ont eu un enseignement de probabilités, une tendance à croire en un contrôle du hasard, causé par l'étude des probabilités. Alors que dans **G1** nous avons une forte option pour le troisième choix de réponse. Ce résultat rejoint celui souligné par Lecoutre et al. (1988) et qui consiste en une forte option pour l'équiprobabilité basé sur l'équitabilité du hasard.

Représentativité de la population

En prenant chaque groupe tout seul:

G1 (n=44)

	T-prob	Prob	P-prob	Impossible
Q3.a	**59.1%**	**27.3%**	9.1%	4.5%
Q3.b	11.9%	**47.6%**	**35.7%**	4.8%
Q3.c	4.8%	16.7%	**57.1%**	**21.4%**
Q3.d	**0%**	4.8%	**26.2%**	**69%**

Les pourcentages les plus forts se trouvent sur la **diagonale**. Ceci représente une **forte représentativité de la population** chez les sujets de ce groupe. Ils semblent raisonner ou juger suivant les proportions des boules blanches et noires dans le résultat en relation avec celles dans la population. Ceci répond à nos attentes. Notons aussi que cette forte représentativité se manifeste dans ce même groupe par une fréquence assez élevée du choix de réponse **"impossible"** pour les résultats c et d et surtout pour le résultat d.

---

12 Les signes > et = correspondent respectivement aux choix de réponses 1 et 2 de la question 8 du questionnaire. Et là aussi, le pourcentage complémentaire qui manque correspond au choix 4 qui ne figure pas sur le tableau.

G2 (n=52)

	T-prob	Prob	P-prob	Impossible
Q3.a	**71.2%**	**26.9%**	1.9%	**0%**
Q3.b	7.7%	**78.8%**	13.5%	**0%**
Q3.c	**25.5%**	**70.6%**	3.9%	**0%**
Q3.d	5.8%	5.8%	**50%**	**38.5%**

Pour les résultats a et d, nous remarquons une option assez nette pour les extrémités de l'échelle; tandis que pour les autres résultats, les sommets des profils se situent à son milieu. Nous traduisons ce résultat par une résignation de la part de ces sujets, pour le probable. Cette résignation peut être le produit d'une influence indirecte de l'intervention didactique. Aussi, ces sujets semblent manifester cette résignation en évitant le choix de réponse **"impossible"**, sauf pour le résultat d.

En prenant les résultats des deux groupes à chaque question:

Q3.a

	T-prob	Prob	P-prob	Impossible
G1	**59.1%**	**27.3%**	9.1%	4.5%
G2	**71.2%**	**26.9%**	1.9%	0%

Q3.b

	T-prob	Prob	P-prob	Impossible
G1	11.9%	**47.6%**	**35.7%**	4.8%
G2	7.7%	**78.8%**	13.5%	0%

Q3.c

	T-prob	Prob	P-prob	Impossible
G1	4.8%	16.7%	**57.1%**	**21.4%**
G2	**25.5%**	**70.6%**	3.9%	**0%**

Q3.d

	T-prob	Prob	P-prob	Impossible
G1	**0%**	4.8%	**26.2%**	**69%**
G2	5.8%	5.8%	**50%**	**38.5%**

Pour les trois premiers couples de distributions, nous remarquons une plus grande dispersion des résultats du groupe 1. Ce qui explique une stabilisation du raisonnement probabiliste chez les sujets de **G2**, contre une instabilité des conceptions probabilistes chez les sujets de **G1**.

Pour le résultat d, nous remarquons chez les deux groupes une option assez forte pour les choix **"peu probable"** et **"impossible"**. Nous interprétons ce dernier résultat par la domination d'un autre paramètre du sac de boule et sur lequel se base la représentativité de la population; à savoir l'homogénéité du sac de boules; i.e. il n'est pas possible qu'étant donné un mélange parfait des boules dans le sac, qu'on n'obtienne que des boules de la même couleur.

Représentativité du hasard

Q11: (comparer les chances d'apparition de **1 2 3 4 5 6** à celle d'un autre résultat qui ne représente pas de régularité)

	>	<	=	pas d'idée	autre
G1	0%	**38.6%**	9.1%	**38.6%**	13.7%
G2	3.8%	**34.6%**	**26.9%**	**25%**	9.7%

Dans les deux groupes, presque le même pourcentage de sujets exprime l'idée que cette combinaison n'a pas assez de chance d'apparaître (choix 2). En plus, dans les deux groupes ce pourcentage est le plus fort. Nous traduisons ce résultat par une forte résistance de cette conception. Nous expliquons cette résistance à deux niveaux différents. Par rapport à un premier niveau, on met la situation dans le cadre de la définition classique de la probabilité. La résistance est alors justifiée par le fait que la conception n'a pas été prise en considération dans l'enseignement donné. Par rapport au deuxième niveau, on met la situation dans le cadre de la définition objective de la probabilité, où l'évaluation de la probabilité se base sur les observations répétées d'un phénomène. La résistance discutée plus haut n'a plus de sens, car, dans ce cas, c'est au résultat de ses observations que le sujet fait appel. En se basant sur le fait que le résultat **1 2 3 4 5 6** n'apparaît presque jamais, il lui associe une probabilité très faible.

Le pourcentage des sujets ayant opté pour le choix de l'équiprobabilité qui est assez considérable dans **G2**, diminue dans **G1** en faveur du choix basé sur l'ignorance. Ceci peut être à notre sens, le résultat d'une influence de l'enseignement.

Q14: [(1) **BNBNBNBNBN** et (2) **NNBNBBBNBN**) **(comparaison des chances** d'apparition de ces deux résultats)

	$p(1)>p(2)$	$p(1)<p(2)$	$p(1)=p(2)$
G1	16.3%	**41.9%**	**41.9%**
G2	13.7%	**23.5%**	**62.7%**

Nous ponvous faire des remarques analogues à celles faites dans la question précédente.

Dépendance VS Indépendance (ou mesure a postériori vs mesure à priori)

Q13[13]: (Face apparaît 15 fois successives, que se passera-t-il à la 16e fois?)

	$p(F)>p(P)$	$p(F)<p(P)$	$p(F)=p(P)$
G1	**42.9%**	**0%**	**57.1%**
G2	25%	1.9%	**73.1%**

Ce sont le premier et le dernier choix qui ont les plus hauts pourcentages, dans les deux groupes. Le pourcentage associé au dernier est dans les deux cas, plus grand que celui associé au premier. Seulement 25% des sujets de **G2**, optent pour le premier choix, alors que dans **G1**, ce pourcentage est de 43%.

Nous interprétons ce dernier résultat par un renforcement du modèle aprioriste de l'équiprobabilité par l'enseignement, et ce, au détriment de l'interprétation fréquenciste de la probabilité, interprétation qui se base surtout sur une mesure a posteriori des chances.

L'absence du deuxième choix est un résultat intrigant. Elle défavorise ce que Fischbein a appelé "recency" négative par rapport à la "recency" positive, qui correspond ici au choix 1. Elle défavorise aussi la représentativité locale de Kahneman et Tversky. Nous pensons que dans cette situation, l'absence du choix 2 est due à la présentation et au contexte de la situation. L'absence du choix 2 peut être confondue avec l'absence du pari dans le jeu ou avec l'absence de la pratique des jeux de ce type chez les sujets... En d'autres termes, le contexte scolaire n'est pas à confondre avec celui des jeux de hasard. La représentativité locale est peut-être plus favorisée dans un contexte plus motivé et plus dynamique tel que ce dernier.

13 p(F) et p(P) signifient respectivement probabilité de face et probabilité de pile.

V- SYNTHESE DES ANALYSES PRÉCÉDENTES

Pour la notion de hasard, elle n'est pas obligatoirement liée aux activités ludiques comme nous l'avons supposé hypothétiquement; mais, aux situations d'où le mot hasard tire son sens. Situations où interviennent les attributs et les signes associés à ce mot tels que: la coïncidence, la surprise, l'improviste...; en un mot, on observe une dominance du côté sémantique du mot hasard. D'où un développement de la notion de hasard loin de toute mesure. Les exemples de jeux, quoique rares dans l'ensemble, ont été observés plus chez les sujets qui ont eu un enseignement que chez les autres. Nous ramenons ceci à la structure des cours de probabilité au secondaire, qui se base en grande partie sur les jeux de hasard.

D'un autre côté, nous croyons que l'enseignement mène au développement d'une tendance plus déterministe qui s'oppose à un élargissement de la portée sémantique de la notion de hasard. Ceci renvoie à la deuxième conception, **contrôle du hasard.** Cette dernière s'est avérée assez fréquente et est liée à plusieurs formes de contrôle (expérience, étude...). Cette conception n'a pas été touchée par l'enseignement et reste parmi les croyances probabilistes de l'élève.

Quant à **l'équiprobabilité**, les résultats du questionnaire aussi bien que les réactions des sujets aux questions des entrevues, ont prouvé l'existence de cette conception sous plusieurs formes. Certaines sont plus primitives que d'autres (équi-ignorance, équi-possibilité), dans le sens qu'elles sont loin de toute tendance de mesure. Ces résultats ont montré aussi que cette conception peut avoir plusieurs supports (un objet ou un caractère du hasard ou autre). D'un autre côté, les résultats du questionnaire ont montré que cette conception peut coexister avec d'autres telle que l'une des deux représentativités[14].

Pour les deux **représentativités**, elles ont été affirmées. La représentativité du hasard semble être plus résistante que celle de la population. Cette dernière s'avère la plus touchée par l'enseignement, l'autre ne l'est pas autant. L'enseignement semble avoir agi pour éliminer "l'impossible" et mener à croire dans le probable avec ses différents degrés (très, peu).

[14] Un grand nombre de sujets affrontés la question 13, reprise en entrevues, expriment les deux opinions à la fois. Ils sont partagés entre la dépendance et l'intépendance.

CONCLUSION

Les informations apportées par le questionnaire et les entrevues, en plus de l'affirmation de la plus part des conceptions hypothétiques posées au départ, nous ont amené à approfondir ces dernières et à en dégager des formulations, souvent véhiculées par les sujets. Ces formulations sont liées, dans la plupart du temps, à la notion de hasard et sont plus ou moins généralisables. Lorsque dans la suite nous parlerons de conceptions, c'est de ces diverses formulations qu'il s'agit.

Nous avons procédé à une certaine catégorisation de ces conceptions selon qu'elles représentent l'équiprobabilité ou la non équiprobabilité et selon qu'ils se fondent sur la notion de hasard, sur la fréquence relative ou sur un autre support cognitif.

En effet, certaines conceptions dérivent directement des idées construites autour de la notion du hasard: ignorance qui entoure une situation aléatoire ou de tous les résultats possibles d'une épreuve. D'autres reposent sur les conceptions construites autour d'un paramètre numérique tels que la moyenne, le rapport, le pourcentage. D'autres encore reposent sur un paramètre physique tel que la symétrie (punaise, dé) ou sur un paramètre spatial, tel que l'homogénéité ou l'uniformité de l'espace dans une situation aléatoire (sac de boule...). Enfin, certaines dérivent d'une conception combinatoire qui consiste en une organisation accrue des expériences probabilistes et procèdent à des activités de dénombrement. La figure suivante tente de donner une synthèse des différentes conceptions discutées ci-dessus, en illustrant le réseau conceptuel révélé par des activités probabilistes.

Cette figure met en relief les relations des deux pôles, équiprobabilité et non équiprobabilité, d'une part, avec la notion de hasard et d'autres part, avec des supports de différentes natures. Pour l'équiprobabilité, la figure présente différentes formes de cette conception; les unes sont plus primitives que les autres, les unes sont directement liées à la notion de hasard, les autres sont liées au dénombrement.

Pour la non équiprobabiliste, la figure reprend les deux types de représentativité comme axes principaux de cette conception. La représentativité du processus du hasard lie cette dernière directement à la notion de hasard alors que la représentativité de la population la lie à cette même notion, à travers une variété de paramètres.

Pour les deux pôles, la figure ne sous-entend aucun ordre ni hiérarchie de ces formes de conceptions. Elle ne sous-entend aucune exclusion des formes les unes les autres: avoir une forme avancée d'une conception n'implique pas automatiquement l'absence des formes plus primitives. Par contre, nous soulignons le fait que la manifestation de l'une ou l'autre de ces formes dépend de la situation à laquelle est confronté le sujet.

Réseau conceptuel en probabilité

Applications didactiques

Il est évident que la connaissance de l'état des idées des sujets sur une notion est un élément qui peut être très utile dans l'enseignement de cette notion. En effet, elle permet la compréhension des origines des difficultés qu'éprouvent les élèves dans l'apprentissage d'une notion particulière. Cette compréhension mène à l'élaboration de séquences, de situations, d'expériences et/ou d'activités didactiques susceptibles de mettre l'élève sur les bonnes pistes d'exploration de la notion à enseigner. Certaines de ces séquences d'enseignement peuvent être conçues pour viser la création d'un conflit cognitif chez l'élève, conflit qui le mettra sur la voie[15] de construction d'une connaissance plus solide et plus générale.

D'un autre côté, la connaissance des idées des élèves et du mode de leur pensée, concernant une notion, renforce et complète l'analyse conceptuelle de la notion elle-même et donne des indices des obstacles épistémologiques ou didactiques relatifs à cette notion.

En effet, la connaissance des conceptions de hasard des élèves montre qu'il y a des composantes linguistiques (la charge sémantique du mot hasard) ou culturelles (pensée déterministe, supersticieuse...) qui s'opposent à une modélisation mathématique de l'aléatoire et au développement d'une dimension probabiliste dans le raisonnement des élèves. De même, les connaissances relatives à certaines notions numériques (moyennes, pourcentage, proportions...) peuvent s'opposer à la notion de probabilité, via une interprétation statique de ces nombres. Une de ces interprétations statiques, qui est très fréquente est celle de la fréquence relative qui tient à garder la proportionalité lorqu'on multiplie les essais d'une expérience et aboutit ainsi à ce qui a été discuté sous le nom de "représentativité de la population".

[15] En remettre en question ses connaissances actuelles.

BIBLIOGRAPHIE

Di Sessa, A. (1987). Phenomenology and the Evolution of Intuition, dans: C. Janvier (Ed.): *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Lawrence Erlbaum Associates Inc. Publishers, pp. 83-96.

Donald, A.N. (1983). Some Observations on Mental Models, dans: D. Gentner et A.L. Stevens (Eds): *Mental Models*. London: Lawrence Erlbaum Associates Inc. Publishers, pp. 7-14.

Fischbein, E., Barbat, I., Minzat, I. (1971). Intuitions primaires et intuitions secondaires dans l'initiation aux probabilités. *Educational Studies in Mathematics*, *4*, pp. 264-280.

Fischbein, E., Gazit, A. (1984). Does the Teaching of Probability Improve Probabilistic Intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*, pp 1-24.

Frechet, M. (1955). Les Mathématiques et le Concret. *Presses Universitaires de France*, 438 pages.

Garfield, J., Ahlgren, A. (1988). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19(1)*, pp. 44-63.

Heisenberg, W. (1962). *La nature dans la physique contemporaine*. Éditions Gallimard, 192 pages.

Janvier, C. (1987). Conceptions and Representations: The Circle as an Example, dans: C. Janvier (Ed.): *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Lawrence Erlbaum Associates Inc. Publishers, pp. 147-158.

Kahneman, D., Tversky, A. (1972). Subjective Probability: A Judgment of Representativeness. *Cognitive Psychology*, *3*, pp. 430-454.

Kapadia, R., Hawkins, A.S. (1984). Children's Conceptions of Probability - A Psychological and Pedagogical Review. *Educational Studies in Mathematics*, *15(4)*, pp. 349-378.

Lecoutre, M.P., Durand, J.L. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, *19(3)*, pp. 357-368.

Maury, S. (1984). La quantification des probabilités: Analyse des arguments utilisés par les élèves de classe de seconde. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 5(2)*, pp. 187-214.

Norman, D.A. (1983). Some Observations on Mental Models, dans: D. Gentner et A.L. Stevens (Eds): *Mental Models*. London: Lawrence Erlbaum Associates Inc. Publishers, pp. 7-14.

Pfeiffer, P.E. (1965). *Concepts of Probability Theory*. McGraw Hill Book Company.

Piaget, J., Inhelder, B. (1951). *La Génèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Presses Universitaires de France.

Poincaré, H. (1987). *Calcul des probabilités*. Éditions Jacques Gabay, pp. 1-23.

Schaughnessy, M.J. (1981). Misconceptions of Probability: From Systematic Errors to Systematic Experiments and Decisions. *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, pp. 90-100.

Sheynin, O.B. (1974). On the Prehistory of the Theory of Probability. *Archive for History of Exact Science, 12*, pp. 97-141.

Viennot, L. (1979). Spontaneous Reasoning in Elementary Dynamics. *European Journal of Science Education, 1(2)*, pp. 205-221.

Von Glasersfeld, E. (1987). Learning as a Constructive Activity, dans: C. Janvier (Ed.): *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Lawrence Erlbaum Associates Inc. Publishers, pp. 3-17.

Des exemplaires du présent document sont en vente à l'adresse suivante:

Centre Interdisciplinaire de Recherche sur
l'Apprentissage et le Développement en Education
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. A,
Montréal, Québec
H3C 3P8

Publié par le Centre Interdisciplinaire de Recherche
sur l'Apprentissage et le Développement en Education

Université du Québec à Montréal

Conception graphique: Pierrette [illegible]